Una introducción al pensamiento lógico formal

Manuel Murillo Tsijli[1]

Resumen

En esta exposición, iniciaremos con un repaso de la terminología necesaria en toda teoría matemática, las definiciones, axioma o postulado, teoremas, proposiciones, lemas, corolarios. Esto con la finalidad de que el oyente tome conciencia que la lógica nos sirve para tomar conciencia sobre el análisis o la veracidad de algunas afirmaciones, nos ayuda en la jerarquización de las proposiciones, nos proporciona una manera correcta de razonar y de manera muy especial, nos da algunos procedimientos para demostrar proposiciones. Se expondrán los sistemas formales en diversos ámbitos, tales como política, astronomía, juegos entre otros. Finalmente, siempre con base en ejemplos, se presentarán algunos sistemas formales independientes de la matemática, en donde se definen los objetos, las reglas, y con base en algunos axiomas, se podrán demostrar algunos teoremas o proposiciones.

Cuando uno ha eliminado el imposible, lo que permanece,
sin embargo improbable, debe ser la verdad.
Sherlock Holmes

Introducción

Para algunos, la lógica es la teoría del pensar, la ciencia de los límites del pensar justo y razonado, para otros, se puede definir brevemente como el estudio del razonamiento; para nosotros, la lógica es la teoría de la inferencia. Su estudio es importante pues nos ayuda a razonar correctamente y para no incurrir en las llamadas falacias argumentativas. Las leyes de la deducción son innatas en los seres humanos, sin embargo, su uso no es obligado y, al igual que las normas morales, pueden ser trasgredidas o ignoradas aun sin percatarnos.

Algunos de los argumentos lógicos más originales corresponden a Lewis Carroll[2]. Veamos cómo él mismo nos explica, en su bella obra *Lógica Simbólica*, las razones del porqué es importante el estudio de este tema:

> "*La lógica simbólica dará a usted claridad de pensamiento, la habilidad para ver su camino a través de un acertijo, el hábito de arreglar sus ideas en una forma*

---

[1] Escuelas de matemática de la UNED y del ITCR, correos electrónicos mamurillo@uned.ac.cr, mmurillo@itcr.ac.cr

[2] Seudónimo del Reverendo Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), matemático, lógico, dibujante, fotógrafo y poeta. Catedrático de la Universidad de Cambridge de Inglaterra. Autor prolífico, dentro de sus obras destacan *Lógica Simbólica*, *Alicia en el País de las Maravillas* y *Silvia y Bruno*.

adecuada y clara, y, lo más valioso, el poder para detectar falacias y separar las piezas de los argumentos endebles e ilógicos que encontramos continuamente en libros, periódicos, discursos, y aún sermones, y que fácilmente engañan a aquellos que nunca se han tomado la molestia de dominar este fascinante arte", véase [Mi].

El concepto de lógica tiene sus orígenes en los estoicos, probablemente en Zenón de Elea (490-430 a.C.), sin embargo, la primera lógica sistemática se debe a Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.), el cual, en uno de los escritos referentes a este tema, se ocupa de las teorías del concepto, del juicio, de la conclusión y de la prueba, es a partir de él que queda constituida como una disciplina propia.

La llamada lógica inductiva, se caracteriza por el razonamiento de que a partir de observaciones específicas se conduce a conclusiones generales, por supuesto que con ella podemos obtener una idea correcta de lo que podría ser una buena conclusión, sin embargo, no podemos pensar que algo es verdadero solamente porque ha sido verdadero en cierto número de casos. Otro tipo de razonamiento, es el método deductivo, que consiste en relacionar conocimientos que se suponen verdaderos de manera que se obtienen nuevos resultados. Nosotros, por lo general, nos separamos de la lógica clásica formal, y utilizamos símbolos matemáticos, por lo que hablaremos de la *lógica simbólica*.

Terminología básica

En toda *teoría matemática*, requerimos de una terminología propia o lenguaje asociado con la notación respectiva, a continuación analizaremos los distintos elementos de esta terminología.

Para iniciar, las *definiciones* caracterizan los objetos matemáticos a tratar y sobre los cuales se refieren las proposiciones (número, número primo, recta, matriz, conjunto compacto, entre otros.). El *axioma* o *postulado* es una proposición cuya validez aceptamos sin ninguna demostración. Los axiomas son los fundamentos de todo desarrollo teórico, son la base sobre la cual se construye una teoría, así por ejemplo, son conocidos los axiomas de Peano, el axioma de especificación, axioma de elección, el axioma del extremo superior, los cinco Postulados de Euclides, entre muchos otros. En matemática se procura tener la menor cantidad posible de axiomas; usualmente se les encuentra en las teorías fundamentales, tales como la teoría de conjuntos. Sin embargo, muchas veces se hacen desarrollos axiomáticos de teorías que pueden prescindir de axiomas y construirse sobre otras teorías, para simplificar su presentación.

Tal es el caso, por ejemplo, de la Geometría Euclideana, expuesta y desarrollada por Euclides en su monumental y trascendental obra *Los Elementos*, para más detalles, véase [Ru], [Cim]. Esta se fundamenta en 23 definiciones, una de estas es por ejemplo "*punto es lo que no tiene partes*"; cinco postulados o axiomas, el enunciado del quinto es:

> [P-5] Que si una línea recta corta a otras dos rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas,

prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

En algunos textos se ha reemplazado este enunciado por el equivalente *Axioma de Playfair*, cuyo enunciado es: "por un punto que no pertenece a una recta, existe una recta paralela a la primera que contiene al punto".

Euclides utiliza lo que denomina *nociones comunes*, él sigue a Aristóteles: mientras que las nociones comunes se aplican a todas las ciencias, los postulados se aplican solo a la geometría. Como ejemplo, mencionamos solo dos nociones comunes

- El todo es mayor que cualquiera de sus partes.
- Dos cantidades iguales a una tercera, son iguales entre sí.

Al negar el quinto postulado se obtienen dos nuevas geometrías, llamadas *geometrías no euclideanas*. La negación de la afirmación de que existe una recta paralela, se puede dar por medio de la tricotomía clásica, hay menos de una (ninguna) o hay más de una (varias). Así, manteniendo los cuatro primeros postulados, pero reemplazando el quinto en el caso en que no existen las rectas paralelas, se obtiene la *geometría esférica* (de Riemann), en el otro caso, se obtiene la *geometría hiperbólica* (de Bolyai y Lobachevski) en donde por un punto que no esté en una recta pasan varias paralelas, consulte [Ru]. En estas geometrías, curiosamente, el teorema que afirma que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados, resulta no ser cierto. Los resultados que se obtienen serán distintos, pues las premisas lo son.

El *teorema* es una proposición cuya validez se verifica como consecuencia lógica de los axiomas; se debe probar a partir de los axiomas y definiciones o de otros teoremas. A los teoremas que no son relevantes en el desarrollo de una teoría se acostumbra denominarlos simplemente *proposiciones*. El *corolario* es un teorema que se deduce fácilmente de un teorema anterior o es un caso particular de un teorema general.

El *lema* es un teorema que es necesario para la demostración de un resultado posterior, pero que se sale del contexto de la teoría que se está desarrollando. Es decir, los lemas no son resultados centrales en el desarrollo de una teoría matemática; sin embargo, un lema en una teoría puede ser un teorema central en otra teoría. El *escolio* es un resultado que se obtiene en el desarrollo de una demostración, que no tiene relación con la teoría que se está estudiando.

Una *conjetura* es una proposición de la que no se puede asegurar su validez, ejemplo interesante es la conocida conjetura de Goldbach, propuesta por Christian Goldbach a Leonhard Euler en el año 1742, en donde se afirma que todo número entero, par, mayor o igual que 4 se puede escribir como la suma de dos números primos. Hasta el día de hoy no se ha podido demostrar su validez, pero tampoco se ha encontrado un número que no se sea la suma de dos primos, solamente se ha podido comprobar para una gran cantidad de números, por ejemplo, $4 = 2 + 2$, $10= 7 + 3$, $50 = 43 + 7$, $100 = 89 + 11$.

Otra conjetura, pues todavía no se ha demostrado, es que hay un número infinito de primos de Mersenne[3], y curiosamente sólo se han encontrado 44 de estos primos. El mayor de estos primos de Mersenne, que además corresponde con el mayor número primo conocido, es $M_{32582657} = 2^{32582657} - 1$, un número de 9808358 dígitos, descubierto en septiembre de 2006 por el Dr. Curtis Cooper y el Dr. Steven Boone, profesores de Central Missouri State University. Para mayores detalles consulte [Mer] ó [Mu2].

Al igual que las dos anteriores, existen miles de conjeturas planteadas, unas de ellas seguirán esperando, a otras se les prueba su falsedad y a otras se prueba su validez, como es el caso reciente de la Conjetura de Poincaré.

Una *paradoja*[4] es una proposición contradictoria en sí misma: no puede ser ni falsa, ni verdadera. Por ejemplo, la frase: "*estoy mintiendo*" es una paradoja en si misma, pues, si es verdadera, estoy mintiendo y por lo tanto es falsa; por otro lado, si es falsa, no estoy mintiendo y por lo tanto es verdadera.

La paradoja anterior radica en la estructura misma del lenguaje, por lo que se dice que es una *paradoja semántica*. Si la paradoja es debida a la escogencia de los axiomas, se dice que es una *paradoja lógica*.

Es importante señalar que los griegos fueron los primeros en plantear distintos tipos de paradojas, una de las más conocidas es la de *Aquiles y la Tortuga*, de Zenón de Elea (490-430 a.C.). A modo de ejemplo, presentamos solamente la *Paradoja de Protágoras* (480-410 a.C.), una de las más antiguas conocidas; surge de la argumentación entre el sofista y maestro de leyes llamado Protágoras y su estudiante Eualzo.

Protágoras aceptó como estudiante a Eualzo que, aunque pobre, era talentoso. Protágoras convino con él en impartirle enseñanza sin cobrarle, a condición de que una vez que el estudiante hubiese completado sus estudios y ganara el primer litigio, en ejercicio de su profesión, le pagaría a Protágoras el costo de los estudios. El estudiante aceptó esta condición. Tras completar sus estudios, Eualzo no emprendió ningún caso legal. Transcurrido cierto tiempo, Protágoras buscó al estudiante y reclamó el pago o lo llevaría a los tribunales.

He aquí los argumentos que alegaron uno y otro:

> **-Eualzo**: *Estimado maestro Protágoras, ¡no pagaré!, ya que en los tribunales solo pueden suceder dos cosas: o gano o pierdo. Si gano, la ley no me obliga a pagarte. Si pierdo, entonces no se habrá cumplido que yo haya ganado mi primer litigio. Por lo tanto, y de acuerdo con nuestro convenio, no deberé pagarte.*
>
> **-Protágoras**: *Estimado ex-discípulo Eualzo,… ¡pagarás!, ya que si vamos a los tribunales, podrán suceder solamente dos cosas: o gano yo o ganas tú. Si gano yo,*

---

[3] Para p primo, los números de la forma $M_p=2^p-1$ se conocen como los *números de Mersenne*, en caso que M_p sea primo se le llama primo de Mersenne.

[4] Del griego παρα (para): contra y δοξα (doxa): opinión.

> *entonces la ley te obliga a pagarme. Si ganas tú, habrás ganado tu primer litigio. Por lo tanto, y de acuerdo con nuestro convenio, tendrás que pagarme.*

Parece que Protágoras y Eualzo tienen razón, o más bien, parece que ninguno tiene la razón.

En general, una *demostración* de una proposición es un ensayo estructurado en donde se verifica de forma irrefutable y convincente, que dicha proposición es verdadera. Finalmente, las palabras *demostración* y *prueba* son sinónimos, el término *verificar* se utiliza a veces en lugar de *probar*, cuando la demostración es esencialmente un cálculo.

Existen muchos tipos de sistemas formales con los cuales nos relacionamos e interactuamos a diario, en ellos están claramente identificados o definidos los objetos de estudio, las relaciones entre ellos, los postulados, axiomas o dogmas en otros, se tienen leyes, resultados probados o teoremas, conjeturas no probadas etc. Nos referimos a sistemas como lo son:

- La astronomía, en donde las definiciones juegan un papel importante, incluso han desatado una fuerte polémica con respecto de la nueva definición de planeta adoptada por la Unión Astronómica Internacional el 24 de agosto de 2006 y el subsiguiente degradamiento de Plutón a planeta enano y por supuesto la falsedad de que el Sistema Solar tiene 9 planetas.
- La literatura, en donde las definiciones y reglas están claramente definidas, para muestra un botón: el escritor guatemalteco Augusto Monterroso publicó "C*uando despertó, el dinosaurio todavía estaba allí*" que está considerada como el relato más breve de la literatura universal.
- La Iglesia, en donde se evidencian la profundidad de los dogmas y creencias, por ejemplo, en el Credo de Nicea en el II Concilio de Toledo del año 589, se cambio "*Creo en el Espíritu Santo que procede del Padre*" por "*Creo en el Espíritu Santo que procede del Padre y del Hijo*" que en adición de otros factores provocó un cisma en la Iglesia Cristiana llamado Cisma de Oriente y Occidente, el 16 de julio de 1054, y se habla de la Católica y de la Ortodoxa, por supuesto que luego aparecería la llamada de la Reforma. Interesante es el dogma para los católicos de la Inmaculada Concepción (sin pecado original) que no es admitido por la Iglesia ortodoxa.
- La economía, que como sistema formal tiene gran influencia, en él se definen objetos y sobre los postulados que dependen de diversas corrientes, se desarrollan teorías

Para comprender mejor la noción de sistema formal, nos parece muy interesante la comparación que hace Mariano Perero en [Pe]:

> "*La matemática, como un sistema puramente formal, se puede comparar con el ajedrez, los elementos primitivos en ajedrez son las 32 piezas y el tablero; los axiomas son las descripciones de los movimientos de las piezas, no son evidentes, no son ni verdaderos ni falsos, son así y se aceptan sin discutir, las reglas del juego constituyen la lógica del sistema. Nadie se pregunta si el ajedrez es verdadero o falso, lo único importante es saber si se siguen las reglas*".

¿Cómo motivar el estudio del buen pensar?

Se puede fomentar el estudio de la lógica desde los niveles de la educación general básica y con ello incentivar la creación de ciertas estructuras mentales que ayudarán en la construcción del conocimiento. Algunas herramientas útiles muy conocidas pueden ser, las que enunciamos a continuación, sin embargo, puede consultar [Mu], [Mu1], [Mu2], [Sud] para más detalles.

ESTUDIO DE DISTINTAS PARADOJAS

Aquí se puede enunciar y discutir algunas de las paradojas más conocidas, como por ejemplo la de Russell, la del Barbero, la del Cretense (Epiménides), la de Aquiles y la Tortuga, la de Cervantes, la de Protágoras, entre otras.

PLANTEO DE ACERTIJOS O PLANTEO DE PROBLEMAS (RETOS)

Ejemplo

En una fiesta hay 10 niños, se les pide que formen 5 filas de manera que se tengan 4 niños por fila y que todos ellos estén en alguna fila. ¿En qué forma deben distribuirse?

Solución

En forma de una estrella de 5 puntas, con un niño en cada punta y en cada intersección de los segmentos.

Ejemplo

Un niño y una niña están sentados en los escalones afuera de su escuela. "*Yo soy un niño*", dijo quien tiene el pelo negro. "*Yo soy una niña*", dijo quien tiene el pelo rojo. Si al menos uno de ellos está mintiendo, ¿quién tiene el pelo rojo?

Solución

El niño tiene el pelo rojo.

Ejemplo

Si se asume que el 70% de los hombres son inteligentes, el 70% son guapos y el 70% son buenos. Como mínimo, sobre un grupo de 100 hombres, ¿qué porcentaje de ellos serán a la vez inteligentes, guapos y buenos?

Solución

Si hay 70 inteligentes y 70 guapos, serían 140 entre ambos, pero como son 100, debe haber al menos 40 que sean inteligentes y guapos a la vez. Luego, al haber 40 inteligentes y guapos y 70 buenos, serían 110, pero como son 100, debe haber como mínimo 10 que sean inteligentes, guapos y buenos a la vez.

Ejemplo

Juan necesita recoger de una laguna 5 litros de agua, pero solo dispone de dos jarras, una de 7 litros y otra de 4 litros. Describa el proceder de Juan para lograr su cometido.

Solución

Se llena la de 4 y se vacía en la grande. Se llena de nuevo la de 4 y se vacía parte del contenido hasta llenar la grande, por lo que en la jarra pequeña quedará 1 litro. Luego, se vacía la grande y el litro de la pequeña se vacía en la de 7 litros. Se llena de nuevo la pequeña y se vierte el agua en la grande, así en la grande se tienen 5 litros.

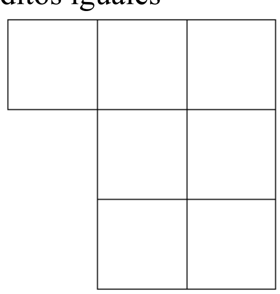
Ejemplo
Existe un pequeño planeta de una lejana galaxia llamado *Vacilonia*, sus habitantes, los vacilonios, están clasificados en dos categorías: los *sinceros* y los *mentirosos*[5]. Los sinceros siempre dicen la verdad y los mentirosos siempre mienten. Un terrícola llega a este planeta y se encuentra con dos vacilonios A y B. El vacilonio A dice: "B es sincero o yo soy mentiroso". ¿Qué son A y B?
Solución
Si A fuese mentiroso, lo que dijo sería mentira, con lo cual la verdad sería "B es mentiroso y yo soy sincero", pero esto es imposible ya que se estaría afirmando que A es mentiroso y sincero a la vez. Por lo tanto, se concluye que A es sincero y con ello, lo que dice es verdad, de donde B es sincero. Se concluye que tanto A como B son sinceros.

Ejemplo
Supóngase que el vacilonio A dice: "o yo soy un mentiroso o en caso contrario uno más uno es igual a tres" ¿Qué se puede concluir?

SERIES NUMÉRICAS
Ejemplo
Determine el número que hace falta en cada una de las siguientes series o arreglos de números.

- 7-8-X-13-17
- 3-X-31-95-283-851
- 17-19-22-16-X-13-32
- 2-5-15-18-54-57-171-X
- 60-30-28-X-12-6-4

JUEGOS DE ÁREAS Y DE FIGURAS QUE SE FORMAN CON PALITOS
Ejemplo
En la siguiente figura, suponga que cada lado de un cuadrado es un palito. Mueva 3 palitos de manera que se formen 5 cuadraditos iguales



[5] Algunos de estos acertijos se deben al gran matemático, lógico, filósofo, ajedrecista y mago profesional Raymond Smullyan, consulte [Mu].

JUEGO DEL AJEDREZ
Este juego facilita la investigación, el análisis, la concentración y propicia el desarrollo de las estructuras mentales a través de la lógica deductiva y son muchos los matemáticos que dedicaron horas a su estudio, Georg Pólya, Lindelöf, Carl Gauss, L. Euler, Landau y Donald E. Knuth, entre otros.

Algunos de los problemas matemáticos, véase [Mu2], que se relacionan con este juego son:

- Menor cantidad de piezas iguales, que cubran el tablero.
- Número máximo de piezas del mismo tipo que se pueden colocar sin que se protejan entre ellas. Problema para el caso de las 8 damas se tienen 92 soluciones, el mismo Gauss, encontró solamente 72.
- problema del movimiento del caballo
- Cuadrados mágicos
- Tableros mágicos.
- Análisis inverso.

JUEGOS NIM
El origen de este tipo de juegos se ubica hace varios milenios, y se practicaba en las estepas de Asia central. No es propiamente un juego de tablero, pues en su origen se jugaba sobre el suelo, con objetos hallados en el mismo sitio como guijarros, palitos, granos, etc. Sobre estos juegos, puede consultar [Mi] y especialmente el interesante artículo *Juegos matemáticos en la enseñanza* de Miguel de Guzmán [Guz], en donde se exponen de manera precisa y con rigurosidad Histórica, los distintos tipos de juegos y su utilidad en la enseñanza, más allá de la simple actividad lúdica.

Ejemplo
Con una cantidad inicial de 40 piedras, los jugadores pueden, en cada turno, quitar 1, 2, 3, 4 ó 5 piedras a su antojo y gana quien se lleve la última piedra. Si suponemos que juegan A y B y que le toca iniciar a A. ¿Cuál es la estrategia ganadora para A?

La estrategia de A consiste en dejar, siempre que pueda tomar todas las piedras que quedan y ganar, un número de piedras que sea múltiplo de 6. Una vez que A conoce la estrategia, no le hace falta hacer cuentas más que la primera vez que juega, en que quita 4 piedras, dejando 36. A partir de allí su táctica es sencilla: si B quita m, A quita $6 - m$.

JUEGO-PASATIEMPO DEL SUDOKU
Véase [Sud].

PEQUEÑOS SISTEMAS FORMALES
Otras que no son tan conocidas, pero serán igualmente efectivas, pueden ser pequeños sistemas formales definidos sobre conjuntos conocidos.

Ejemplo
Sobre el conjunto formado por las letras M, U, I se forman las palabras.

Regla 1. *Toda palabra se puede triplicar.*
Regla 2. *Una* U *se puede reemplazar por* II
Regla 3. *Si aparece* IIII *se puede eliminar.*
Regla 4. *Después de una* M *se puede insertar una* U.
Regla 5. *Si en una palabra aparece* IMU *puede quitarse la* M.

Definición: Una palabra es ***admisible*** si se obtiene al aplicar una o varias de estas reglas a otra palabra admisible.

Axioma: *la palabra* MI es *admisible.*

Teorema: *la palabra* MMI *es admisible.*
Demostración.

MI	(Axioma)
MIMIMI	(por Regla 1)
MIMUIMI	(por Regla 4)
MIUIMI	(por Regla 5)
MIIIIMI	(por Regla 2)
MMI	(por Regla 3)

Con lo cual queda probado el teorema.

Como ejercicio, demuestre que son admisibles las palabras MIM, MUIM, MIIIMII, MIU, MUMI, MMIII, MIIIM, MIMUU, MUUIUIMIII. Demuestre además, que la palabra MU no es admisible.

Ejemplo
Sea A un subconjunto del conjunto de los números reales que cumple las siguientes proposiciones (axiomas):

Axioma 1: $3 \in A$
Axioma 2: $x \in A \Rightarrow 3x + 1 \in A$
Axioma 3: $x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (x + y) \in A$

Veamos las demostraciones de los siguientes teoremas.

Teorema 1. Si $7 \in A$ entonces $25 \in A$.
Demostración. Hipótesis: $7 \in A$
hqm: $25 \in A$

1.		$7 \in A$	(Premisa)
2.	$\Rightarrow$	$3 \cdot 7 + 1 = 22 \in A$	(Axioma 2)
3.	$\Rightarrow$	$22 \in A \wedge 3 \in A$	(Adjunción de axioma 1)
4.	$\Rightarrow$	$25 \in A$ (Axioma 3)	

Teorema 2. Si $2 \in A$ entonces $27 \in A$.
Demostración. Hipótesis: $2 \in A$
hqm: $27 \in A$

1.		$2 \in A$	
2.	$\Rightarrow$	$3 \cdot 2 + 1 = 7 \in A$	(Axioma 2)
3.	$\Rightarrow$	$25 \in A$	(Teorema 1)
4.	$\Rightarrow$	$25 \in A \wedge 2 \in A$	(Adjunción de 1.)
5.	$\Rightarrow$	$27 \in A$	(Axioma 3)

Bibliografía

[Gar] Gardner, Martin. *Circo Matemático*, Alianza Editorial, Madrid, 1985.

[Gon] Góngora, Enrique. *Introducción al Pensamiento Lógico Matemático*, Editorial UNED, Costa Rica, 1979.

[Gra] Grassmann, W. & Tremblay, J.P. *Matemática Discreta y Lógica*, Prentice Hall, Madrid, 1996.

[Guz] de Guzmán, Miguel. *Juegos matemáticos en la enseñanza*, España. Disponible en www.sectormatematica.cl/juegmat.htm

[Hof] Hofstadter, Douglas R. *Gödel, Escher, Bach*, Vintage Books, Random House, New York, 1980.

[Mi] Miller, Charles & Heeren, Vern. *Introducción al pensamiento matemático*, Primera Edición, Editorial Trillas, México, 1979.

[Mu] Murillo, Manuel. *Introducción a la Matemática Discreta*, Editorial Tecnológica de Costa Rica, Costa Rica, 2004.

[Mu1] Murillo, Manuel & González, José Fabio. *Teoría de los números*, Editorial Tecnológica de Costa Rica, Costa Rica, 2006.

[Mu2] Murillo, Manuel *et al*. *Un mosaico ajedrecístico*, Revista Matemática, Educación e Internet, ITCR, Vol. 2, Num. 1, 2001. Disponible en http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesN12001/ajedrez/pag1.html

[Pe] Perero, Mariano. *Historia e Historias de Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994.

[Ru] Ruiz, Ángel. *Historia y Filosofía de las Matemáticas*, Editorial de la Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica, 2003.

[Sch] Scheinerman, Edward. *Matemáticas Discretas*, Editorial Thomson, México, 2001.

[Smu] Smullyan, Raymond. ¿*Cómo se llama este libro*?, Ediciones Cátedra, Madrid, 1985.

[Cim] www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/Historia%20y%20Filosofia/Secciones/Biografias.htm

[Sud] www.sudoku.com